

Friends, Keile und Ufos: Haltebedingungen und Sprengkräfte

Treibi, a.k.a. Der Physiker

24. Juni 2018

1 Friend

Ich mache folgende Annahmen (vgl. Abb. 1):

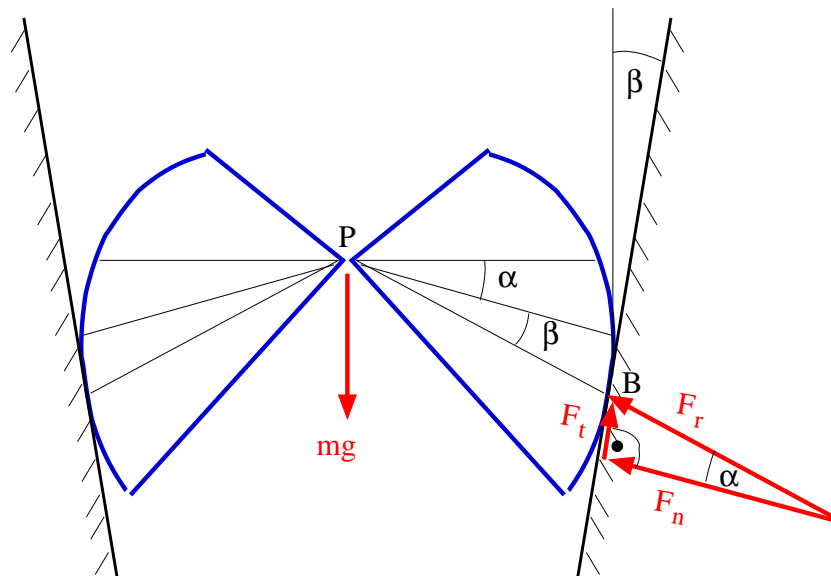


Abbildung 1: Geometrie und Bezeichnungen eines Friend in einem nichtparallelen Riss

- Einachsiger Friend¹, dessen Klemmelemente die Form einer geometrischen Spirale mit Steigungswinkel α aufweisen.
- Riss mit ebenen Wänden und halben Öffnungswinkel β (nach oben offen: β positiv, nach unten offen: β negativ). Alle Kräfte liegen in einer Ebene, es gibt also keinen *flare* (Riss nach außen offen) oder Hinterschnitt (Riss weitet sich nach innen). Damit liegen alle Kräfte in einer Ebene und die Dimension in den Riss hinein spielt keine Rolle.
- Haft-Reibungskoeffizient Friendbacken-Fels konstant= μ , Achsreibung vernachlässigbar (kein Drehmoment im Angriffspunkt P)

¹ Die Einachsigkeit ist dabei keine Einschränkung, zweiachsige Friends funktionieren exakt genauso.

1.1 Haltebedingung

Im nach oben offenem Riss hält der Friend wegen Formschlusses immer. In parallelen und nach unten offenen Rissen ($\beta \leq 0$, Kraftschluss) muss die Tangentialkraft F_t an den Risswänden kleiner oder gleich μ multipliziert mit der Normalkraft F_n sein. Da in P kein Drehmoment stattfindet, wird die Gewichtskraft mg allein durch die Reaktionskraft F_r in Richtung der Verbindungslinie Felsberührungspunkt B - Angriffspunkt P ausgeglichen.² Die Reaktionskraft hängt damit *nicht* vom Reibungskoeffizienten ab (solange der Friend hält) und bestimmt sich aus dem Kräftegleichgewicht in vertikale Richtung:

$$mg = 2F_r \sin(\alpha + \beta)$$

Damit sind die drei Kräfte am Fels gegeben durch

$$F_r = \frac{mg}{2 \sin(\alpha + \beta)}, \quad F_n = F_r \cos \alpha, \quad F_t = F_r \sin \alpha \quad (1)$$

Damit der Friend hält, muss die Tangentialkraft immer $\leq \mu F_n$ sein, also

$$\frac{F_t}{F_n} = \tan \alpha \leq \mu \quad (2)$$

Rein mit Winkeln kann man dies auch ausdrücken durch

$$\arctan(\mu) = \delta_c > \alpha \quad (3)$$

wobei der "Reibungswinkel" δ_c der durch die Reibung bestimmte maximale Winkel zwischen F_r und F_n ist.

Bemerkung: Dies ist unabhängig (!!) vom Riss-Öffnungswinkel. Diese Unabhängigkeit wird dadurch realisiert, dass die Sprengkraft mit sinkendem β immer mehr ansteigt, siehe nächsten Unterabschnitt.

1.2 Sprengkraft

Unabhängig davon, ob Form- oder Kraftschluss vorliegt, sind die Kräfte immer durch (1) gegeben, insbesondere die Sprengkraft = Normalkraft³

$$F_n^{\text{Friend}} = \frac{mg \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad (4)$$

Im Gegensatz zur Haltebedingung hängen also die Sprengkräfte eines Friend vom (halben) Riss-Öffnungswinkel β ab. Für parallele Risse erhält man den Spezialfall

$$F_n^{\text{Friend}} = \frac{mg}{2 \tan \alpha} \quad (5)$$

und, falls der Friend halten soll, mit (2) für parallele Risse die Ungleichung

$$F_n^{\text{Friend}} \geq \frac{mg}{2\mu} \quad (6)$$

²In der 2D-Betrachtung; entspricht Linienkräften in 3D.

³Man könnte statt der Normalkraft (normal auf den Risswänden) auch die Kraft F_\perp senkrecht zur Zugrichtung als Sprengkraft bezeichnen. Dies ergibt einen Unterschied von etwa dem Faktor $\cos \beta$, welcher für interessierende Winkel nahe 1 und damit nicht relevant ist. Es würde sich z.B. anstelle von (4) die Kraft $F_\perp = mg/(2 \tan(\alpha + \beta))$ ergeben.

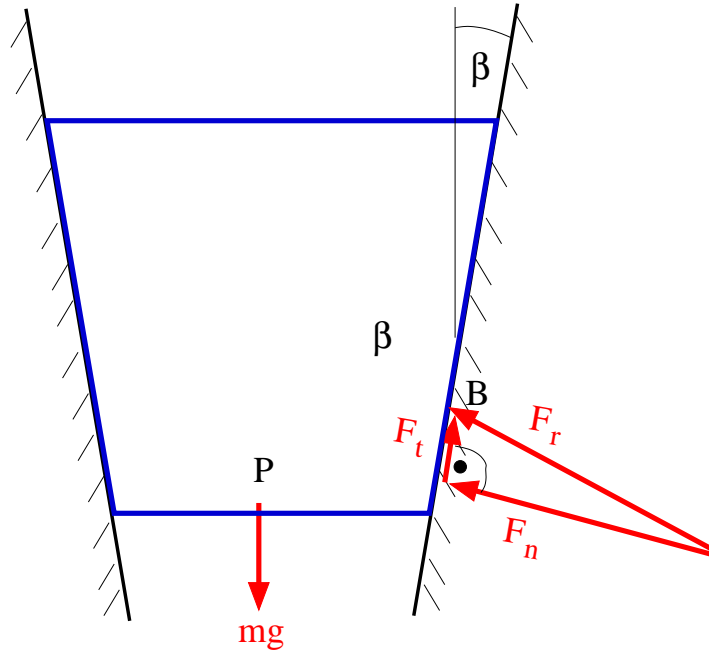


Abbildung 2: Geometrie und Bezeichnungen eines starren Keils in einem nichtparallelen Riss

2 Keil

Annahmen (vgl. Abb. 2):

- starrer trapezförmiger Keil mit halben Keilwinkel = halben Riss-Öffnungswinkel β^4
- Gleit=Haftreibungskoeffizient Keil-Fels konstant= μ

Ein passiver, starrer Keil benötigt immer Formschluss zum Halten, die Haltebedingung ist also trivial $\beta > 0$ und nur die Sprengkräfte sind interessant. Nach Abb. 2 ist die Kräftegeometrie ähnlich wie beim Friend. Der entscheidende Unterschied ist aber, dass die Reibung immer maximal ausgenutzt wird⁵ und so die Tangentialkraft bestimmt:

$$F_t = \mu F_n$$

Damit lautet das vertikale Kräftegleichgewicht:

$$mg = 2(F_n \sin \beta + F_t \cos \beta) = 2F_n(\sin \beta + \mu \cos \beta)$$

bzw.

$$mg = 2F_r \sin(\delta_c + \beta), \quad \delta_c = \arctan \mu \quad (7)$$

⁴Keile mit anderen Öffnungswinkeln sowie geschwungener ("Rocks") und/oder doppelt- oder dreifach-konischer Oberfläche, Schraubenmutter, Knotenschlingen, Steine etc. verringern die Auflagefläche, verändern aber bei konstanten Reibungskoeffizienten nix an der Rechnung.

⁵zumindest falls ein nur auf einer Risswand liegender Keil runterrutschen würde, bis er die zweite Risswand trifft und Formschluss erreicht wird: $\beta < \pi/2 - \delta_c$; ansonsten hat man einen trivial zu berechnenden T-Anker wie bei *Separate Reality*, wenn man die Friends/Keile von oben legt und die Schlingen zum Clippen in den Riss herabhängend lässt.

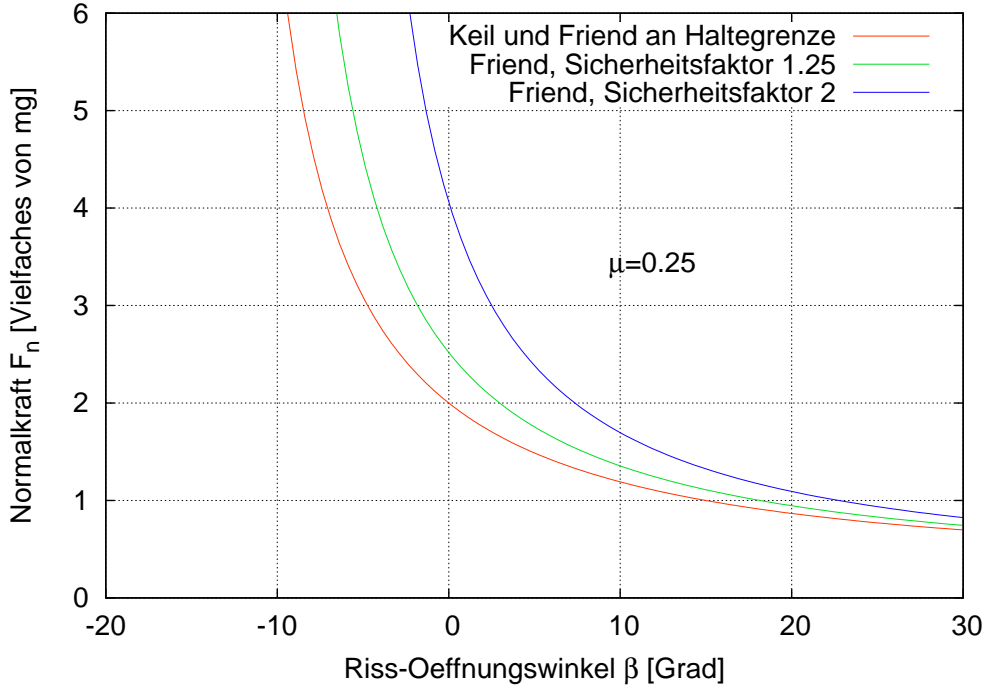


Abbildung 3: Sprengkräfte (Normalkräfte auf die Risswände) bei Friends und starren Keilen

und damit⁶

$$F_n^{\text{Keil}} = \frac{mg}{2(\sin \beta + \mu \cos \beta)} \quad \text{bzw.} \quad F_n^{\text{Keil}} = \frac{mg \cos \delta_c}{2 \sin(\delta_c + \beta)}. \quad (8)$$

Insbesondere gilt in nahezu parallelen Rissen $\beta \ll \mu$:

$$F_n^{\text{Keil}} \approx \frac{mg}{2\mu}$$

und mit (6)

$$F_n^{\text{Keil}} < F_n^{\text{Friend}} \quad (9)$$

Für allgemeine Riss-Öffnungswinkel und einen Reibungskoeffizienten von 0.25 gibt Abb. 3 die Verhältnisse an. Anscheinend ist die Friend-Sprengkraft (4) für den Haltegrenzfall $\alpha = \arctan \mu$ identisch zur Keil-Sprengkraft (8), ich bin aber zu faul, das zu zeigen. Interessanterweise reduziert beim Friend eine hohe Rutschsicherheit (entspricht einem kleinen Steigungswinkel α) den Maximalwinkel nach unten geöffneter Risse, bei der er hält.

Also summa summarum:

- Die Form eines Keils hat keine Auswirkung auf die Kräfte, nur auf die Verteilung der Kräfte und da ist natürlich ein satt anliegender Keil besser. Dieser “hält” auch besser, aber nur deshalb, da er durch kurzzeitigen Zug “festgeklemmt” werden kann und dadurch besser gegen Herausfallen durch Seilbewegungen etc geschützt ist.

⁶Die komplett unterschiedlich aussehenden beiden folgenden Beziehungen lassen sich umrechnen durch durch trigonometrische Umformungen $\sin(x+y)$ in $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ und $\cos y$ (Additionstheorem), danach Umwandeln von $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ in $\tan \alpha = \mu$.

- Die Sprengkraft eines Keils ist formal die eines Friend, wenn man den Steigungswinkel α der Friend-Segmente durch den Reibungswinkel $\delta_c = \arctan \mu$ ersetzt.
- Hält der Friend in parallelen und nach unten geöffneten Rissen ($\delta_c > \alpha$), ist seine Sprengkraft bei allen mit Keilen vergleichbaren Fällen (Formschluss, $\beta > 0$) immer größer als die des Keils.
- Anders herum: die Friend-Sprengkraft ist so groß wie die eines besonders rutschigen Keils (z.B. geölte Flächen) an besonders glattem Fels, bei der ein Friend gerade noch halten würde.

3 Ufo

Seit einiger Zeit schwebt ein unbekanntes, von einem pffiffigen Tschechen erfundenes neues Flugobjekt über der Sächsischen Kletterszene, das Ufo (Abb. 4). Wie ein Friend ist es ein aktives Sicherungsmittel, d.h. es erhöht die seitlichen Spreizkräfte unter Belastung. Andererseits ist es zu 100 % aus Stoff und genügt damit den strengen Elbi-Kletterregeln. Das Ufo besteht aus einem möglichst harten keilförmigen Kern, der bei Belastung in eine weichere, nur lose verbundene "Tasche" rutscht, die sich dabei aufspreizt und die aktive Klemmwirkung verursacht. Die Reibung Kern-Tasche (Koeffizient μ_K) sollte dabei möglichst klein und die Reibung Tasche-Fels (Koeffizient μ_F) möglichst groß sein.

Da die Tasche anschmiegsam ist und vom Kern am oberen Ende gespreizt wird, sind die Kräfte Kern-Tasche genau wie die zwischen Keil und Fels, nur dass nicht der Fels-Öffnungswinkel β sondern der halbe Keilwinkel α entscheidend sind, also in Analogie zu (7) (vgl. Abb. 5):

$$mg = 2F_r \sin(\alpha + \gamma), \quad \gamma = \arctan \mu_K \quad (10)$$

3.1 Haltebedingung

Ob das Ufo hält, entscheidet die Reaktionskraft F_r , welche nach (10) unabhängig vom Riss-Öffnungswinkel ist. Es hält, wenn der Winkel zwischen der Fels-Normale bzw. Normalkraft F_{nF} und der Reaktionskraft kleiner ist als der durch die Reibung gegebene Grenzwinkel δ_c :

$$\delta = \alpha + \gamma - \beta < \delta_c = \arctan \mu_F \quad (11)$$

mit α dem halben Keilwinkel, β dem halben Riss-Öffnungswinkel und $\gamma = \arctan \mu_K$ dem Reibungs-Grenzwinkel Kern-Tasche.

Bemerkungen:

- Natürlich ist diese Formel nur für parallele oder nach unten geöffnete Risse ($\beta \leq 0$) relevant, ansonsten gilt Formschluss.
- Für die Haltekraft in solchen Rissen ist ein kleiner Keilwinkel, ein geringer Reibungskoeffizient Kern-Tasche und ein großer Reibungskoeffizient Tasche-Fels förderlich. Tests vom Physiker zeigten selbst im rutschigen Indian-Creek Sandstein eine Haltekraft in parallelen und selbst minimal nach unten geöffneten Rissen.

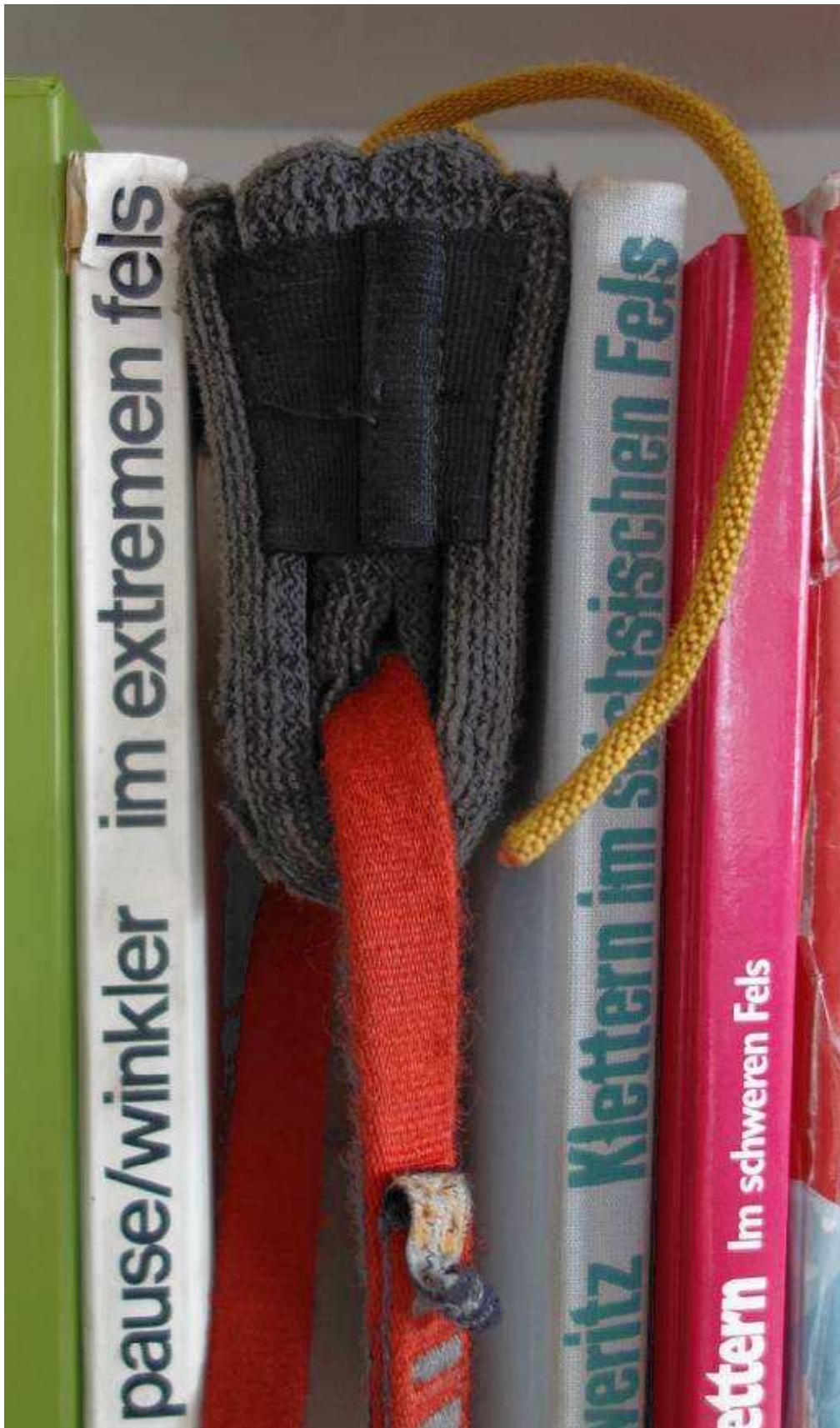


Abbildung 4: Ein Obrworks-Ufo 1. Die Größenbezeichnungen und Farbcodierungen entsprechen meist den Camalots.

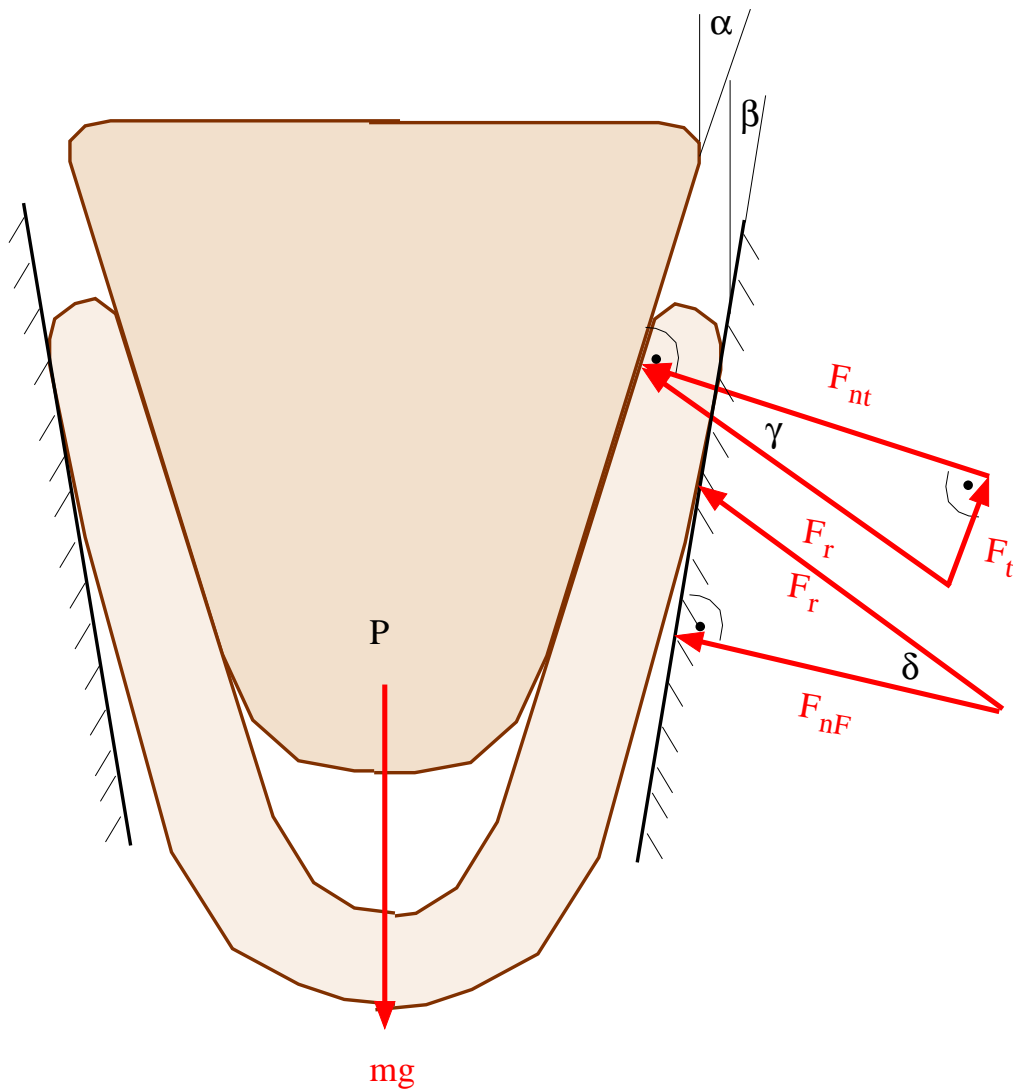


Abbildung 5: Kräfte beim Ufo. Zentral ist die Reaktionskraft, die vom Ufo-Kern (dreieckiges Teil oben) auf die Tasche (unten) wirkt und von der Tasche weiter auf den Fels. Die beiden Kraftpfeile F_r sind in Wirklichkeit auf einer Kraftlinie und nur aus Darstellungsgründen versetzt gezeichnet.

- Für parallele Risse und $\mu_K = 0$ vereinfacht sich dies zu

$$\delta_c > \alpha,$$

also genau wie die Friend-Haltebedingung (3):

Ein Ufo mit vernachlässigbarer Reibung zwischen Kern und Tasche hat in parallelen Rissen dieselbe Haltekraftbedingung wie ein Friend, wenn man den halben Ufo-Keilwinkel mit der Steigung der geometrischen Spirale der Friend-Segmente gleichsetzt.

In Wirklichkeit hat ein Ufo eine endliche Reibung Kern-Tasche (schlecht) aber verglichen mit einem Friend eine größere Reibung am Fels. Insbesondere sind auch für endliche Reibungskoeffizienten μ_K die Haltebedingungen von Ufo und Friend in parallelen Rissen gleich, falls die Reibungskoeffizienten die Bedingung

$$\delta_c^{\text{Friend}} = \delta_c^{\text{Ufo}} - \gamma, \quad \gamma = \arctan \mu_K,$$

erfüllen, also “Reibungswinkel des Friend = Ufo-Reibungswinkel Tasche-Fels abzüglich Reibungswinkel Kern-Tasche”.

- Im Gegensatz zum Friend hängt die Haltebedingung vom Fels-Öffnungswinkel ab.
- Die Tasche muss eine gewisse Dicke aufweisen, da andererseits Diskrepanzen $\alpha - \beta$ zwischen Keil- und Riss-Öffnungswinkel nicht ausgeglichen werden können.

3.2 Sprengkraft

Diese ist direkt durch den Betrag der Fels-Normalkraft F_{nF} gegeben (vgl. Abb. 6):

$$F_{nF} = F_r \cos \delta = \frac{mg \cos(\alpha + \gamma - \beta)}{2 \sin(\alpha + \gamma)} \quad (12)$$

Da $\cos x \leq 1$ gilt immer die Ungleichung

$$F_{nF} \leq \frac{mg}{2 \sin(\alpha + \gamma)}$$

Bemerkungen:

- Für parallele Risse gilt

$$F_{nF} = \frac{mg}{2 \tan(\alpha + \gamma)},$$

Für $\gamma = 0$, also keine Reibung zwischen Kern und Tasche, ist dies die Friend-Sprengkraft. Für endliche Reibungswinkel ist die Ufo-Sprengkraft *geringer*.

- Definiert man die Sprengkraft als F_{\perp} senkrecht zur Zugkraft und nicht normal zur Oberfläche, ergibt sich allgemein

$$F_{\perp}^{\text{Ufo}} = \frac{mg}{2 \tan(\alpha + \gamma)}, \quad (13)$$

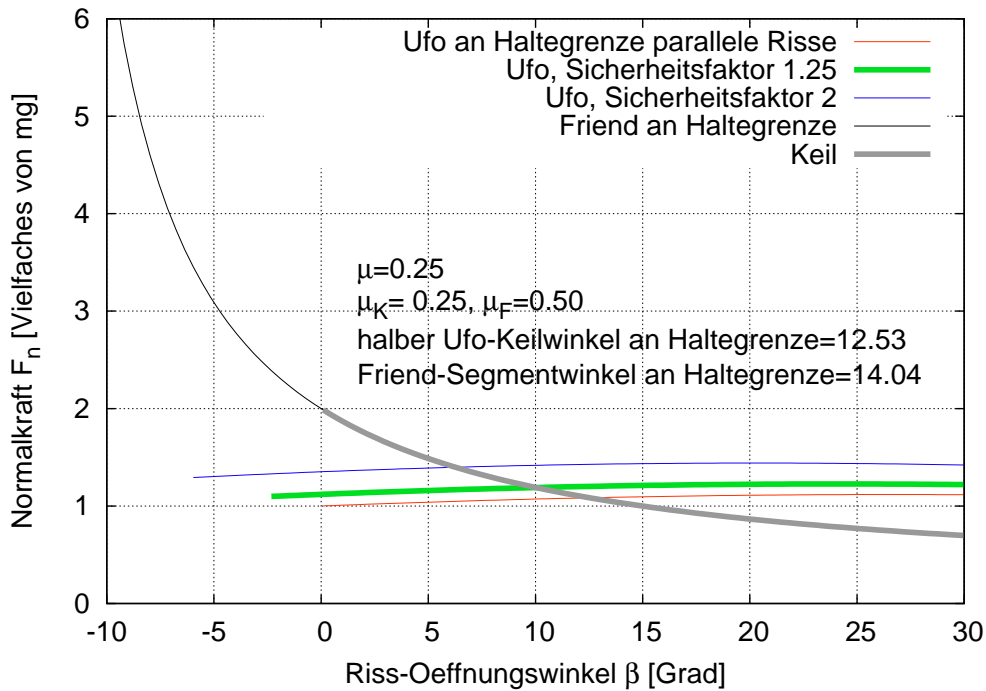


Abbildung 6: Ufo-Sprengkraft (12) in Abhängigkeiten des Riss-Öffnungswinkels bei den angegebenen Reibungskoeffizienten μ_K (Kern-Tasche) und μ_F (Tasche-Fels) für verschiedene Sicherheitsfaktoren (Faktor 2 bedeutet, der Ufo-Keilwinkel ist nur halb so groß als einer, bei welchem das Ufo nach (11) gerade noch in parallelen Risse halten würde). Zum Vergleich sind auch die Friend- und Keil-Sprengkräfte bei dem angegebenen Reibungskoeffizienten μ zwischen Metall und Fels geplottet. Die Kurven gehen bis zur Grenze der Haltefähigkeit nach (11), für kleinere Risswinkel zieht es die Teile bei Belastung heraus.

- Für parallele und nach unten offene Risse, wo die Haltebedingung relevant ist, gilt $\delta = \alpha + \gamma - \beta < \delta_c$ und $\cos \delta$ ist für gängige Reibungskoeffizienten nahe 1. Die Sprengkraft hängt dann im Gegensatz zu der des Friens kaum vom Felswinkel ab. Generell ist die Ufo-Sprengkraft erstaunlich konstant (Abb. 6).
- Am wichtigsten: Außer für sehr “trichterförmige” Risse ist die Ufo-Sprengkraft *kleiner* als die anderer aktiver *und passiver* Sicherungsmittel. Zusammen mit der anschmiegsamen und auch größeren Oberfläche sind sie somit bedeutend *felschonender*. Die etwas größere Sprengkraft bei “Trichtern” kommt daher, da sich dann sowohl Keil als auch Frient “aufstützen”, während sich ein Ufo bei Zug immer spreizen “will”.